Óptica cuántica I: Espectro angular de las parejas de fotones, tipo I, degenerado y no colinear. Versión 2.0

Héctor Cruz Ramírez[1]
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
[1]hector.cruz@ciencias.unam.mx

septiembre 2017

Índice

1. Introducción y objetivos

1.1. ¿"Las parejas de fotones" es luz no clásica?

En 1960, T. H. Maiman reporta en *Nature* la primera implementación de lo que entendemos hoy como un láser [1]. Este hecho fue un punto de partida para el desarrollo de toda la óptica actual, ya que el siguiente año se reporta la primera observación de un efecto de la óptica no lineal: *la generación del segundo armónico* (*SHG* por sus siglas en inglés de *second harmonic generation*) [2].

El proceso de *SHG* consiste en tener un cristal no centro-simétrico lo cual nos permite tener una susceptibilidad eléctrica de segundo orden $\chi^{(2)}$ diferente de cero, y además, consideremos que tenemos un láser (que llamaremos **bombeo**) que emite en una frecuencia angular ω_{p} y interactúa con ese cristal, entonces si cumplen ciertas condiciones (llamadas empatamiento de fases o *phasematching*) a la salida de cristal tendremos las siguientes señales: el bombeo atenuado y una nueva señal, la cual es el segundo armónico con frecuencia angular ω_{SHG}[3]. Ver Figura (1 a). Ahora consideremos un segundo fenómeno óptico no lineal, el proceso de *Optical Parametric Amplifier* (*OPA* por sus siglas en inglés)[3]. En este caso tenemos además del bombeo, ω_{p}, una pequeña onda que llamaremos **señal** de frecuencia angular ω_{s}. Ver Figura (1 b). Entonces, a la salida de cristal se observan tres ondas, el bombeo, la señal amplificada y una nueva onda llamada **acompañante** de frecuencia angular ω_{i}, de tal forma que estas ondas las modelan las siguientes ecuaciones[3]

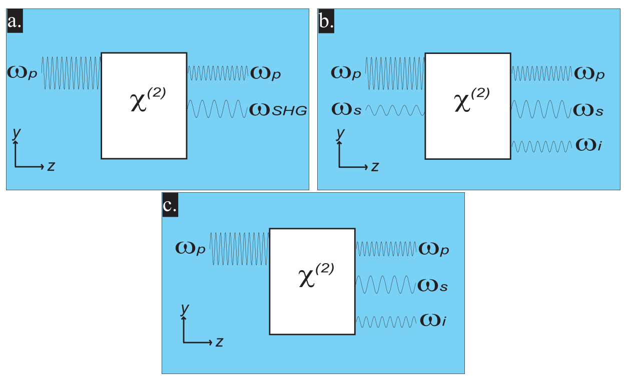

Figura 1: Procesos de la óptica no lineal (a y b) y la óptica cuántica (c).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_{\omega_{\mathrm{s}}} &\propto A_{\omega_{\mathrm{p}}}\,A^*_{\omega_{\mathrm{i}}}\,\mathrm{e}^{-i\Delta k\,z},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_{\omega_{\mathrm{i}}} &\propto A_{\omega_{\mathrm{p}}}\,A^*_{\omega_{\mathrm{s}}}\,\mathrm{e}^{-i\Delta k\,z},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_{\omega_{\mathrm{p}}} &\propto A_{\omega_{\mathrm{s}}}\,A^*_{\omega_{\mathrm{i}}}\,\mathrm{e}^{-i\Delta k\,z}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Estas últimas ecuaciones son ecuaciones diferencias acopladas para las amplitudes complejas $A_{\omega_{\mathrm{p}}}$, $A_{\omega_{\mathrm{s}}}$ y $A_{\omega_{\mathrm{i}}}$. En el caso de la Figura (1 b) tenemos que las condiciones iniciales son $A_{\omega_{\mathrm{p}}}(0)\neq 0$, $A_{\omega_{\mathrm{s}}}(0)\neq 0$ y $A_{\omega_{\mathrm{i}}}(0)=0$, entonces existe solución. Ahora bien, en el caso de tener las condiciones iniciales $A_{\omega_{\mathrm{p}}}(0)\neq 0$, $A_{\omega_{\mathrm{s}}}(0)=0$ y $A_{\omega_{\mathrm{i}}}(0)=0$, ver Figura (1 c), y por las Ecuaciones (1) se tendría que la solución es cero para todas las amplitudes complejas, por lo cual no se tendría ni onda señal, ni onda acompañante a la salida. Pero si se observan tanto la *señal* como el *acompañante* a la salida pese a que las amplitudes complejas son nulas a la entrada; entonces, clásicamente no se puede explicar esto fenómeno*. Por lo tanto, esto nos abre la puerta a nuevos fenómenos que son cuánticos y uno de los más estudiados y usados para varias aplicaciones es: las **parejas de fotones** producidas por **conversion paramétrica descendente espontanea** (*SPDC* por sus siglas en inglés de *spontaneous parametric downconversion*), ver Figura (1 c).

1.1.1. Las parejas de fotones

El proceso de conversion paramétrica descendente espontanea consiste en lo siguiente, se hace incidir un haz de luz láser (que llamaremos **bombeo**) sobre un cristal con susceptibilidad $\chi^{(2)}$ diferente de cero, luego, si se cumplen las condiciones de **empatamiento de fases** (*phasematching*) cuando el bombeo interactúa con el cristal se tiene que existe cierta probabilidad de que un fotón de bombeo se aniquile y se crean dos fotones, los cuales son llamados **fotón señal** y **fotón acompañante**[5, 6], ver Figura (2). Lo que sigue obtener la **función de amplitud compleja**, F, cuyo modulo cuadrado nos dice la probabilidad de que un fotón señal se emita con las siguientes **coordenadas fotónicas** $(k_{x\mathrm{s}}, k_{y\mathrm{s}}, \omega_\mathrm{s})$ y el fotón acompañante se emita con las coordenadas fotónicas $(k_{x\mathrm{i}}, k_{y\mathrm{i}}, \omega_\mathrm{i})$, ver Figura (2).

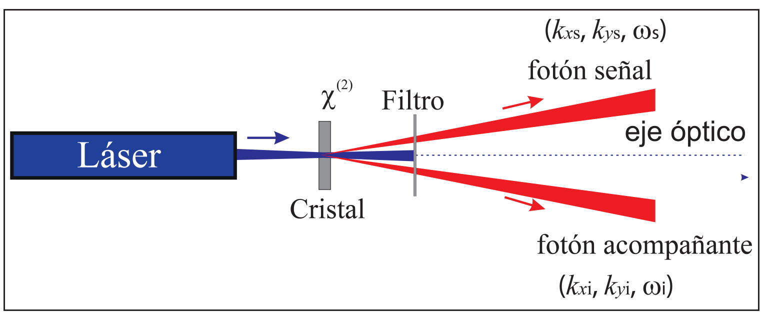

Figura 2: Proceso de generación de parejas de fotones por conversion paramétrica descendente espontanea. F es un filtro que bloque el bombeo después del cristal y no apantalle a los fotones.

1.2. Objetivos

Los objetivos son

*Realmente, este proceso se puede modelar considerando ruido blanco en la entrada, pero esto no permite explicar la propiedad de enradamiento cuántico que tienen las parejas de fotones[4].

1. Introducción al modelo de la generación de las pareja de fotones por el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea.
2. Obtener el espectro angular de las pareja de fotones del tipo I, degenerados y no colineal.
3. Cambiar la orientación del cristal para cambiar las características de la emisión de la parejas de fotones (ingeniería cuántica básica).

2. Teoría

2.1. Estado cuántico del *SPDC*

En la representación de interacción en mecánica cuántica y considerando los términos de primer orden en la teoría perturbativa, tenemos que el estado cuántico de las parejas de fotones producidas por conversión paramétrica descendente espontánea* (*SPDC*, por sus siglas en inglés *spontaneous parametric downconversion*) esta dado por [6, 7, 8]

$$\begin{aligned} |\mathrm{SPDC}\rangle &= |\Psi\rangle \\ &\approx |\mathrm{vac}\rangle + \eta \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{k}_\mathrm{s} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{k}_\mathrm{i}\, F(\vec{k}_\mathrm{s},\vec{k}_\mathrm{i})\, \hat{a}_\mathrm{s}^\dagger(\vec{k}_\mathrm{s})\, \hat{a}_\mathrm{i}^\dagger(\vec{k}_\mathrm{i})\ |\mathrm{vac}\rangle\,, \end{aligned} \tag{2}$$

donde η es una constante que esta relacionada con la eficiencia del proceso de *SPDC* y que agrupa todas las constantes, $|\mathrm{vac}\rangle$ es el estado cuántico para cero partículas (vacío), $\vec{k}_\mathrm{s}$ y $\vec{k}_\mathrm{i}$ son los vectores de onda de los fotones señal y acompañante respectivamente, $\hat{a}_\mathrm{s}^\dagger(\vec{k}_\mathrm{s})$ y $\hat{a}_\mathrm{i}^\dagger(\vec{k}_\mathrm{i})$ son los operadores de creación para los fotones señal y acompañante respectivamente, y $F(\cdot)$ es la función *WJA* (por sus siglas en inglés de *wavevector joint amplitude*) dada por

$$F(\vec{k}_\mathrm{s},\vec{k}_\mathrm{i}) \;=\; \alpha(\omega_\mathrm{s}+\omega_\mathrm{i};\omega_{\mathrm{p}0})\,\Phi(\vec{k}_\mathrm{s},\vec{k}_\mathrm{i}) \tag{3}$$

donde $\alpha(\cdot)$ es la envolvente temporal del bombeo con $\omega_{\mathrm{p}0}$ la frecuencia angular central y $\Phi(\cdot)$ es la función de *phasematching*. En este punto, el estado cuántico de la pareja de fotones está expresada mediante las variables fotónicas: $k_{\mathrm{s}x}, k_{\mathrm{s}y}, k_{\mathrm{s}z}, k_{\mathrm{i}x}, k_{\mathrm{i}y}$ y $k_{\mathrm{i}z}$. La forma de $\Phi(\cdot)$ estará determinada por la estructura espacial del bombeo y las propiedades del cristal.

En esta notas consideramos un haz gaussiano como bombeo (sin el efecto de *walk-off*) tal que su el radio del cinturón es W_0, por lo cual

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}_s,\vec{k}_i) &= \pi W_0^2 \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z\ \exp\left\{i\Delta k_z z\right\}\cdot \exp\left\{-\frac{W_0^2}{4}[(k_x^\perp)^2+(k_y^\perp)^2]q(z)\right\} \\ &= L\pi W_0^2 \exp\left\{-\frac{W_0^2}{4}|\vec{k}^\perp|^2\right\} \mathrm{sinc}\left\{\frac{L\Delta k_{eff}}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

*El bombeo se considera un campo clásico.

donde

$$\Delta k_{eff} = \frac{|\vec{k}^{\perp}|^2}{2k_p} - \Delta k_z, \tag{5}$$

además $\Delta k_z = k_{\rm p} - k_{{\rm s}z} - k_{{\rm i}z}$, $k_{\rm p}$ es el vector de onda del bombeo, $k_x^{\perp} = k_{{\rm s}x} + k_{{\rm i}x}$, $k_y^{\perp} = k_{{\rm s}y} + k_{{\rm i}y}$, y L es la longitud del cristal.

Es importante hacer notar que hemos omitido la fase de Φ debido a que las propiedades del SPDC, que se obtienen en la Sección 2.2, se calcula a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula.

2.1.1. Estructura de la función *WJA*

A continuación haremos un análisis de la estructura de la función de amplitud compleja *WJA*, $F(\cdot)$[7]. Recordando la Ec. (3) tenemos que $F(\cdot)$ es el producto de las funciones $\alpha(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$. La primera función es la envolvente espectral o la función que contiene las propiedades temporales del bombeo. La segunda función es la que llamamos función de *phasematching*, $\Phi(\cdot)$. De la sección anterior se observa que a esta función podemos representarla como el producto de dos funciones. La primera de ellas que la llamaremos función de *phasematching* longitudinal, $\Phi_L(\cdot)$, y que es igual a la función $\mathrm{sinc}(\cdot)$; y la cual contiene las propiedades del cristal (ángulo de *phasematching*, longitud del cristal L). La segunda de ellas que la llamaremos función de *phasematching* transversal, $\Phi_T(\cdot)$, y que es igual al espectro angular del bombeo en términos de las variables $k_x^{\perp}$ y $k_y^{\perp}$; y la cual contiene las propiedades espaciales (como el radio de cinturón si el bombeo es una haz gaussiano). Hay que notar que todas las funciones dependen de los vectores de onda de la señal, el acompañante y el bombeo, y que para calcularlos debemos conocer los índices de refracción a través de la ecuaciones de Sellmeier y que dependen del cristal que se utilize.

En conclusión la función $F(\cdot)$ tiene la siguiente estructura[7]

$$\begin{aligned} F(\cdot) = {} & \alpha(\text{propiedades temporales del bombeo}) \times \\ & \Phi_L(\text{propiedades del cristal}) \times \Phi_T(\text{propiedades espaciales del bombeo}), \end{aligned} \tag{6}$$

lo cual permite hacer un análisis del estado cuántico del *SPDC* al manipular las propiedades del cristal y el bombeo. Cuando podemos controlar el estado cuántico del *SPDC* se dice que hacemos ingeniería de estados cuánticos. Como una aplicación de lo anterior podemos determinar las condiciones experimentales del cristal y el bombeo para obtener estados cuánticos factorizables y no factorizables[7].

2.2. Espectro angular (EA)

El espectro angular es igual a [8]

$$
\begin{aligned}
R_s(\vec{k}_{s0}^{\perp}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 k_{\mathrm{i}} \, \langle \Psi | \, \hat{n}_i(\vec{k}_i) \, | \Psi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 k_{\mathrm{i}} \, \langle \Psi | \, \hat{1} \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) \, | \Psi \rangle \, ,
\end{aligned} \tag{7}
$$

donde $\hat{n}_i = \hat{a}_{\mathrm{i}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathrm{i}}$ es el operador de número de partículas, $\hat{1}$ es el operador unitario en el espacio de la señal (recuerde que estamos considerando dos partículas por lo que se deben considerar dos espacios de Hilbert). Calculando obtenemos

$$
\begin{aligned}
R_s(\vec{k}_{s0}^{\perp}) &= \int \mathrm{d}^3 k_{\mathrm{s}} \int \mathrm{d}^3 k_{\mathrm{i}} \left| \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}^{\perp}, \vec{k}_i) \right|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{s}}^{\perp} \int \mathrm{d} k_{\mathrm{s}} \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{i}}^{\perp} \int \mathrm{d} k_{\mathrm{i}} \, J_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{i}} \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^{\perp}, k_{\mathrm{s}}, \vec{k}_{s0}^{\perp}, \vec{k}_i^{\perp}, k_{\mathrm{i}}) \right|^2 \\
&= \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{s}}^{\perp} \int \mathrm{d} \omega_s \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{i}}^{\perp} \int \mathrm{d} \omega_i \, \times \\
&\times \dot{k}_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{s}} \dot{k}_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}} \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^{\perp}, \omega_s, \vec{k}_{s0}^{\perp}, \vec{k}_i^{\perp}, \omega_i) \right|^2 ,
\end{aligned} \tag{8}
$$

que es una suma **incoherente**, y donde se a realizado las transformaciones

$$
(\vec{k}_\mu^{\perp}, k_{\mu z}) \to (\vec{k}_\mu^{\perp}, k_\mu) \to (\vec{k}_\mu^{\perp}, \omega_\mu),
$$

donde deben considerarse los jacobianos $\dot{k}_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{s}}$ y $\dot{k}_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}}$[7].

2.2.1. EA aproximación de bombeo de onda continua

Procederemos a considerar que el bombeo es de onda continua. Lo cual significa que el bombeo es monocromático, entonces

$$
|\alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_p)|^2 \approx \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i).
$$

Por lo cual

$$
R_s(\vec{k}_{s0}^{\perp}) = \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{s}}^{\perp} \int \mathrm{d} \omega_s \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{i}}^{\perp} \, \cdot \, \dot{k}_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{s}} \dot{k}_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}} \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^{\perp}, \omega_s, \vec{k}_{s0}^{\perp}, \vec{k}_i^{\perp}, \omega_p - \omega_s) \right|^2 . \tag{9}
$$

2.2.2. EA aproximación de resolución perfecta

Suponiendo resolución perfecta, tenemos

$$
\left| u(\vec{k}_\mu^{\perp}, \vec{k}_{\mu 0}^{\perp}) \right|^2 = \delta\left(\vec{k}_\mu^{\perp} - \vec{k}_{\mu 0}^{\perp} \right) ,
$$

por lo cual

$$
R_s^{(0)}(\vec{k}_{s0}^{\perp}) = \int \mathrm{d} \omega_s \int \mathrm{d}^2 k_{\mathrm{i}}^{\perp} \, \cdot \, \dot{k}_{\mathrm{s}} J_{\mathrm{s}} \dot{k}_{\mathrm{i}} J_{\mathrm{i}} \left| F(\vec{k}_{s0}^{\perp}, \omega_s, \vec{k}_{s0}^{\perp}, \vec{k}_i^{\perp}, \omega_p - \omega_s) \right|^2 . \tag{10}
$$

3. Experimento

El arreglo experimental es mostrado en la Figura (3). Primero debemos considerar que deseamos generar parejas de fotones del tipo I, no colineal y degenerado en un cristal de Beta Borato de Bario (BBO por sus siglas en inglés de *beta barium borate*), el cual es *negativo*. Para lo cual, necesitamos que el bombeo se una onda **extraordinaria**, entonces los fotones que se generen serán fotones **ordinarios**. Si τ es el plano que forman el eje óptico y el vector de propagación del bombeo, entonces la dirección de polarización lineal del bombeo es paralelo a este plano y la dirección de polarización lineal de los fotones es perpendicular a este plano. Primero necesitamos un láser que emita en una longitud de onda de 405 nm, y consideramos que un un haz gaussiano. La preparación del haz de bombeo consiste en un filtro (F_1) que bloque la luz espuria alrededor de 810 nm que proviene de este láser y una placa retardadora de media onda (P_1) para rotar su polarización lineal; ambos elementos son mostrados en la Figura (3). Se estable el eje óptico con ayuda de dos espejos M_1 y M_2 de tal forma que el haz láser (bombeo) pasa por los diafragmas D_1 y D_2.

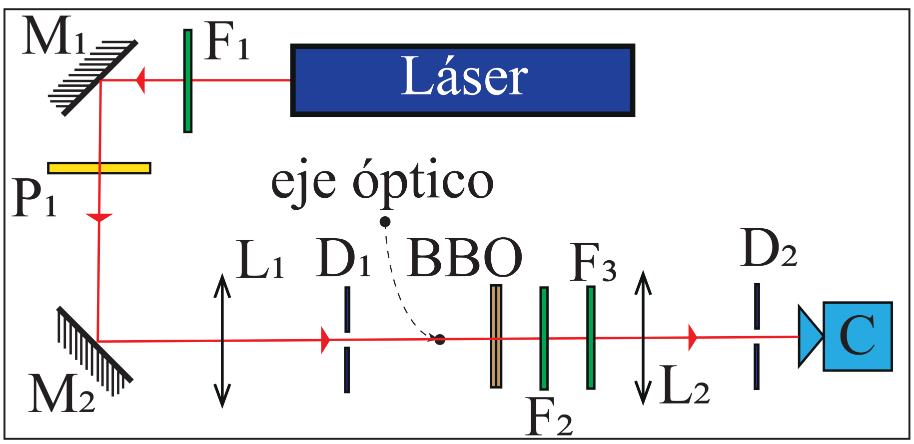

Figura 3: Arreglo experimental para obtener el espectro angular de la pareja de fotones.

Con la lente L_1 hacemos que el bombeo incide sobre el cristal BBO de tal forma que el cinturón este en medio del cristal con un radio W_0 (aqui el estudiante puede elegir cualquier lente). La longitud del cristal típicamente es de $L = 1$ mm. Dentro del cristal cada fotón del bombeo existe una probabilidad de ser aniquilado y dar paso a la creación de dos fotones llamados señal y acompañante. La preparación del cristal consiste en generar un estado degenerado y no colineal, lo cual significa que los fotones (señal y acompañante) con mayor probabilidad de emitirse sean los que tienen una longitud de onda de 810 nm y tienen el mismo ángulo de emisión. Para calcular la dirección preferencial del cristal se usa la Ecuación (5) dando un ángulo de *phasematching* de 29.3°.

Los fotones generados se propagan después del cristal, en donde se coloca un filtro que bloque el remanente del bombeo (F_1) y un segundo filtro pasabanda centrado en 810 nm con un ancho de banda de 10nm (F_2), esto último para restringirnos al estado degenerado. De esta limitamos nuestro estudio a los fotones alrededor de la frecuencia angular degenerada. Para obtener el espectro angular colocamos una lente (L_2) de distancia focal f_2 =25.4 mm (puede elegirse otra distancia focal corta) en una configuración $f_2 - f_2$. En plano focal frontal de coloca el cristal y en el plano focal posterior una cámara CCD (*charge-coupled device*) ultra sensible para observar el espectro angular de la parejas de fotones, el cual es modela por la Ecuación (10). En la Figura (4) se muestra el espectro angular del *SPDC* con los parámetros descritos en esta sección y calculada por medio de una simulación numérica de la Ecuación (10).

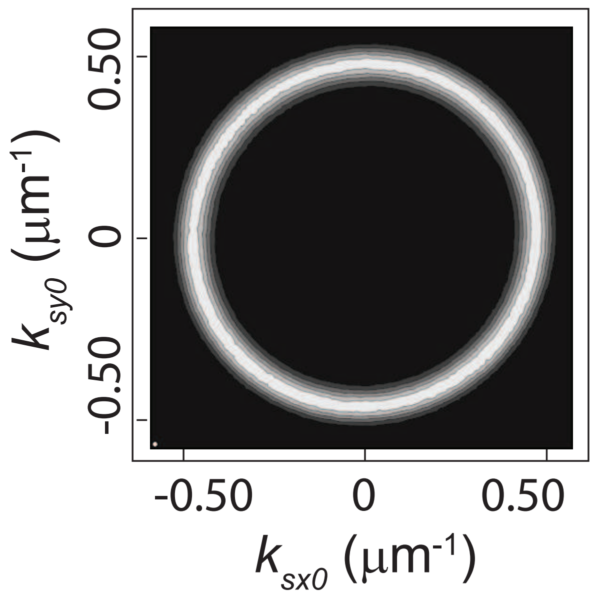

Figura 4: Espectro angular del *spdc* teórica.

3.1. Sobre los materiales y equipos que serán utilizados

Para que la práctica se pueda realizar con éxito se necesita equipo y material de buena calidad. Los espejos deben ser de primera superficie. Se necesita un láser estable con buena potencia (100 mW sería lo óptimo) y que emita en una longitud de onda central de 405 nm; además, que este polarizado linealmente y que tenga una estructura espacial gaussiana $\mathbb{M}^2 \approx 1$. ADVERTENCIA: nunca deberá apuntar el haz laser sobre un compañero, ni mucho menos hacer incidir sobre un ojo; lo mismo aplica para los haces producidos por trasmisión y reflejo en los elementos ópticos usados. La óptica de polarización: la placa retardadora

$\lambda/2$ tiene que tener una *retardancia* muy proximo a 0.5 en 405 nm. Los filtro F_1, F_2 y F_3 deben ser de buena calidad. En la Figura (5 a) se muestra un ejemplo de trasmitancia *vs.* λ para el filtro F_1 (Filtro pasabajas en longitud de onda). En la Figura (5 b) se muestran ejemplos de trasmitancia *vs.* λ para el filtro F_2 (Filtro pasaaltas en longitud de onda) y F_3 (Filtro pasabandas). En ambas figuras las líneas rojas muestran las longitudes de onda 405 nm y 810 nm. La cámara debe tener alta sensibilidad en 810 nm para poder observar las parejas de fotones. El problema técnico radica en la luz que deseamos adquirir imágenes se encuentra en el *regimen espontaneo*, por lo cual, se debe elegir una cámara adecuada.

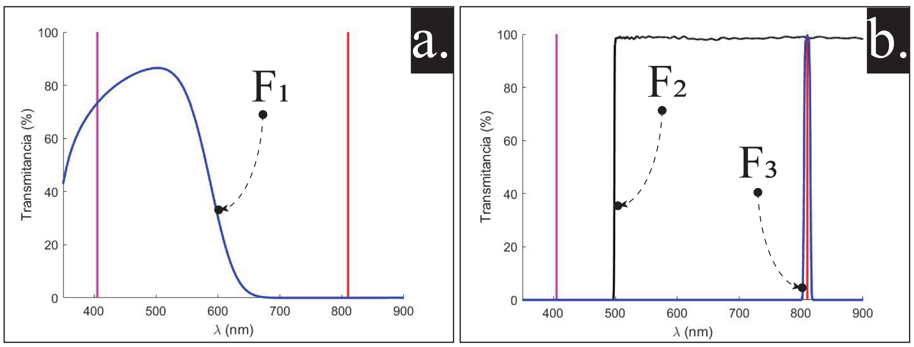

Figura 5: Espectro angular del *spdc* teórica.

3.2. Incertidumbre y regresiónes

En esta práctica el tamaño del pixel debe considerarse para determinar la incertidumbre de los valores de k_x y k_y que se están calculando, ya que, la imagen que se adquiere con la cámara (en el plano de Fourier) esta definido en el espacio $x-y$, entonces se debe hacer la conversión al espacio $k_x - k_y$. El factor de conversión sería $\frac{\omega}{cf_2}$[9], donde ω puede tomarse como la frecuencia angular de los fotones degenerados, f la distancia focal de la lente usada y c la velocidad de la luz. Si se desea comparar la teoría con el experimento se propone comparar la marginales de ambas.

4. Pormenores de la práctica

Cantidad de sesiones en el laboratorio: 3 sesiones.

5. Agradecimientos

Estas notas fueron realizadas con el apoyo de los proyectos PAPIME (la última versión con el proyecto PE105920). Agradecemos a los estudiantes Itzel Ileana Julio Borja, Samuel Corona Aquino, Javier Alejandro López, Alfaro Jorge

Arturo Monroy Ruz y Francisco Javier Morelos Medina por su contribución a la elaboración de estas notas.

Referencias

[1] T. H. Maiman, "Stimulated Optical Radiation in Ruby, " *Nature* **187**, 493-494 (1960).

[2] P. Franken, A. Hill, C. Peters, G. Weinreich, "Generation of Optical Harmonics," *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118-119 (1961).

[3] R. W. Boyd, "Nonlinear optics," Academic Press, 3rd edition (2008).

[4] R. L. Byer and S. E. Harris, "Power and bandwidth of spontaneous parametric emission," *Phys. Rev.*, **168**(3), pp. 1064-1068 (1968).

[5] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, "Observation of simultaneity in paramteric production of optical photon pairs," *Phys. Rev. Lett.*, **25**(2), pp. 84-87 (1970).

[6] C. K. Hong and L. Mandel, "Theory of parametric down conversion of light," *Phys. Rev. A* **31**, 2409-2418 (1985).

[7] H. Cruz-Ramirez,"Acondicionamiento del enredamiento espacial en parejas de fotones producidas por conversión paramétrica descendente," Tesis doctoral, UNAM (2014).

[8] Leonard Mandel and Emil Wolf, "Optical Coherence and Quantum Optics," Cambridge University Press, 1995.

[9] Joseph W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics, 3rd edition;" Roberts & Company Publishers, 2005.